

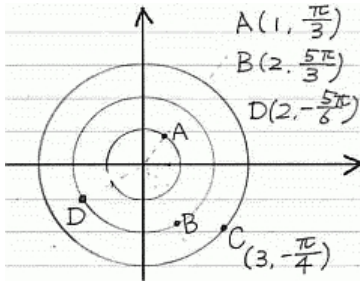
Q.2.1(p.11)

求める変位の大きさは

$$\sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad (\text{答え}) \quad 5$$

Q.2.2(p.13)

(答え)



Q.2.3(p.13)

変位の大きさは円の直径に等しいので、

$$\text{変位の大きさ} = 5 + 5 = 10 \quad (\text{答え}) \quad 10$$

道のりの長さは円周の半分に等しいので、

$$\text{道のりの長さ} = 10 \times \pi \div 2 = 5\pi \quad (\text{答え}) \quad 5\pi$$

Q.2.4(p.15)

(1) 平均の速さは

$$\frac{(87-28)}{(3-2)} = 59[m/s] \quad (\text{答え}) \quad 59[m/s]$$

Q.2.5(p.18)

位置座標 $x[m]$ と時間 $t[s]$ の関係が $x = t^2 + 3t + 2$

速度は式を微分したものと等しいので、速度を v とおくと $v = 2t + 3[m/s]$ (答え) $v = 2t + 3[m/s]$

加速度は速度をさらに微分したものに等しいので、加速度を a とおくと $a = 2[m/s^2]$ (答え) $a = 2[m/s^2]$

Q.3.1(p.24)

(1) $v = v_0$ 求める変位 Δx は $t=1$ から $t=6$ まで積分してやればよいので

$$\Delta x = \int_1^6 (v_0) dt = [v_0 t]_1^6 = 6v_0 - v_0 = 5v_0 [m] \quad (\text{答え}) \quad 5v_0 [m]$$

(2) $v = -2t + 10$ (1) と同じく積分してやればよいので

$$\Delta x = \int_1^6 (-2t + 10) dt = [-t^2 + 10t]_1^6 = (-36 + 60) - (-1 + 10) = 15 [m] \quad (\text{答え}) \quad 15 [m]$$

Q.3.2(p.28)

(1) $a=a_0$ 求める速度変化 Δv は $t=1$ から $t=6$ まで積分すればよいので

$$\Delta v = \int_1^6 (a_0) dt = [a_0 t]_1^6 = 6a_0 - a_0 = 5a_0 [m/s] \quad (\text{答え}) \quad 5a_0 [m/s]$$

(2) $a=-2t+10$ (1) と同様にして解けばよいので

$$\Delta v = \int_1^6 (-2t+10) dt = [-t^2 + 10t]_1^6 = (-36+60) - (-1+10) = 15 [m/s] \quad (\text{答え}) \quad 15 [m/s]$$

Q.3.3(p.31)

物体 A が物体 B に追いつくまでの時間は、相対速度 $v_a - v_b$ を考え、 $d[m]$ 差があるので

$$\frac{d}{v_a - v_b} \quad [s] \quad (\text{答え}) \quad \frac{d}{v_a - v_b} \quad [s]$$

Q.3.4(p.35)

このときの等加速度と初速度は、

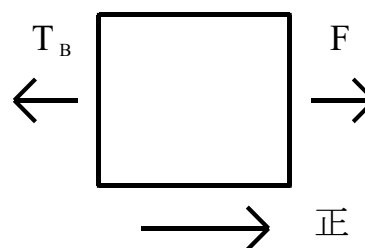
公式 $v=v_0+at$ $x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$ を用いて値を代入し連立して解く。

$$\begin{aligned} 10 &= v_0 + 4a & v_0 &= 15 [m/s] & v_0 &= 15 [m/s] \\ 50 &= 0 + 4v_0 + 8a & a &= -\frac{5}{4} [m/s^2] & (\text{答え}) \quad a &= -\frac{5}{4} [m/s^2] \end{aligned}$$

Q.4.1(p.41)

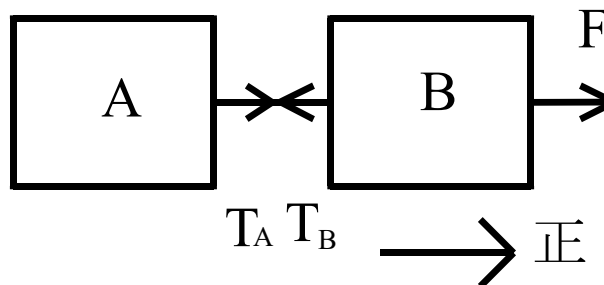
(1) B の運動方程式は

$$ma = F - T_B \quad (\text{答え}) \quad ma = F - T_B$$



(2) B の加速度は図より

$$\begin{aligned} T_A &= T_B \\ ma &= T_A & \text{より} \quad a &= \frac{F}{2m} [m/s^2] \\ ma &= F - T_B \end{aligned}$$



(1)、(2) より

$$ma = F - T_B$$

$$m \times \frac{F}{2m} = F - T_B \quad T_A = T_B = \frac{F}{2}$$

$$(\text{答え}) \quad T_A = T_B = \frac{F}{2} [\text{N}]$$

$$T_B = \frac{F}{2}$$

Q.5.1(p.51)

x, y, z 成分は x 方向の単位ベクトルを $\bar{x}$ 、y 方向の単位ベクトルを $\bar{y}$ 、z 方向の単位ベクトルを $\bar{z}$ とおくと

$$\bar{A} \times \bar{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \bar{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \bar{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \bar{z}$$

Q.5.2(p.53)

$$A + B = (3\bar{x} + 4\bar{y} + 5\bar{z}) + (-\bar{x} + 3\bar{y} - 2\bar{z})$$

$$= 2\bar{x} + 7\bar{y} + 3\bar{z}$$

$$A \bullet B = (3 \times (-1)) + (4 \times 3) + (5 \times (-2))$$

$$= -3 + 12 - 10 = -1$$

$$A - B = (3\bar{x} + 4\bar{y} + 5\bar{z}) - (-\bar{x} + 3\bar{y} - 2\bar{z})$$

$$= 4\bar{x} + \bar{y} + 7\bar{z}$$

$$A \times B = (4 \times (-2) - 5 \times 3) \bar{x} + (5 \times (-1) - 3 \times (-2)) \bar{y} + (3 \times 3 - 4 \times (-1)) \bar{z}$$

$$= -23\bar{x} + \bar{y} + 13\bar{z}$$

$$|C| = \sqrt{((-2)^2 + (-7)^2 + (-3)^2)}$$

$$C = -2\bar{x} - 7\bar{y} - 3\bar{z}$$

$$= \sqrt{(4 + 49 + 9)}$$

$$= \sqrt{62}$$

Q.5.3(p.62)

理由は、x 方向に初速があるからである。

質点が初速度を持つ場合、その初速度方向へ等速直線運動をしようとする（慣性の法則）。

一方、重力が働いているので放物運動になる。

Q.5.4(p.64)

鉛直下方に落下する物体に対する運動方程式は、鉛直下方を座標軸の正方向にとって次のように書ける。

$$m \times \left(\frac{dv}{dt} \right) = mg - kv^2$$

ここで、m は質量、k は抵抗力の比例定数 (k > 0)。

鉛直上方に打ち上げた場合は次のようになる。

$$m \times \left(\frac{dv}{dt} \right) = mg + kv^2 \quad \text{抵抗力の働く方向に注意してください。}$$

Q.5.5(p.66)

問題文に「運動を考えてみよ」と書いてあるのは、停止するまでの時間を求めよ、という意味です。

運動方程式は、次のようになります。

$$m(d^2x/dt^2) = -mg\sin\alpha - \mu' N$$

$$m(d^2y/dt^2) = N - mg\cos\alpha = 0$$

x 方向の加速度は、 $(d^2x/dt^2) = -g(\sin\alpha + \mu' \cos\alpha)$ となる。初速度 v_0 で上昇するのだから、

$t = v_0 / g(\sin\alpha + \mu' \cos\alpha)$ これが停止するまでの時間。

Q.5.6(p.71)

質点は、水平面上で等速円運動をするので、円の中心に向かう向心力が働いていると言える。

図 5.23 において糸の張力を T で表す。円の中心方向の成分、 $T\sin\alpha$ が向心力となる。

円の半径は、 $L\sin\alpha$ なので次式が書ける。

$$m(l\sin\alpha)\omega^2 = T\sin\alpha \quad (1 \text{ 式})$$

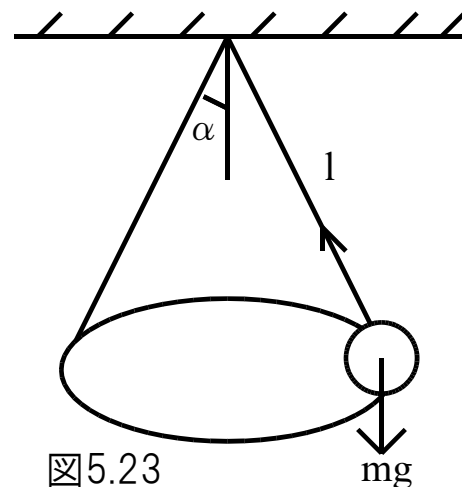
鉛直方向には、張力の鉛直成分と重力がつりあうので、

$$mg = T\cos\alpha \quad (2 \text{ 式})$$

この二つの式から、 $\omega^2 = g / (l\cos\alpha)$

周期 $= (2\pi / \omega) = 2\pi\sqrt{(l\cos\alpha / g)}$ (2 式) から向心力を求めることができる。

$T\sin\alpha = mg\tan\alpha$. . . これが向心力である。



Q.5.7(p.75)

バネ定数を k として振動方向に x 軸をとる。 ω_1, ω_2 を各々の振動の各速度として、 m_1 と m_2 について運動方程式を立てる。

$$m_2(d^2x/dt^2) = -kx$$

これらを解いて、 $(k/m_2) = \omega_2^2, (k/m_1) = \omega_1^2$ となる。

$$m_1(d^2x/dt^2) = -kx$$

振動数を求めると、 $v_2 = \omega_2 / 2\pi = (1/2\pi)\sqrt{(k/m_2)}$ これら二つの式から、 k を消去して、
 $v_1 = \omega_1 / 2\pi = (1/2\pi)\sqrt{(k/m_1)}$

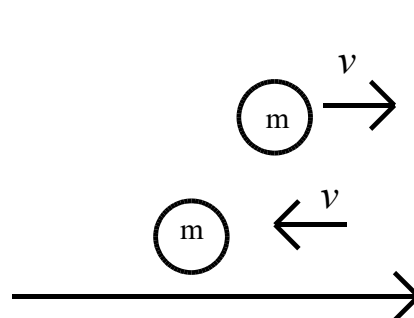
$v_1 = v_2(\sqrt{(m_2/m_1)})$ となる。 . . . これが答え。

Q.6.1(p.89)

(1) 運動量変化を Δmv とおくと、 $\Delta mv = (-mv) - mv = -2mv$

(2) 壁から受けた力積は、 $-mv$

(3) 壁に与えた力積は、 mv



Q.6.2(p.91)

方法として $p(t)$ の接線、つまり微分したものを作図すればよい。

Q.6.3(p.91)

おそらく、ジュータンの上に落とした場合、衝突に時間がかかるのだらうと思われる。

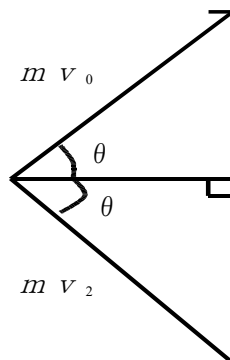
その結果、コンクリートの場合に比べ衝撃が少なく、われないと考えられる。

(コンクリートに比べジュータンの方が反発係数が小さく運動量を多くうばってくれるため)

Q.6.4(p.93)

$$|v_2| = |v_0|$$

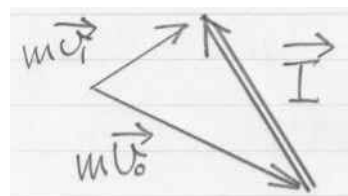
v_2 の方向、水平面となす角 $= \theta$



Q.6.5(p.94)

(a) 図において、摩擦力は左向きに働く。

v_1 を仮に v_{1x}, v_{1y} に分けたとすれば、摩擦力が働くと、 v_{1x} が小さくなる。



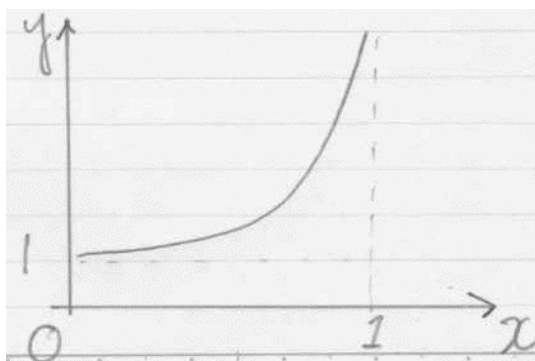
Q.6.6(p.95)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$(6.9) \text{式} \cdots \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

のグラフを考える。



Q.6.7(p.95)

分母が 0 になってしまうため。

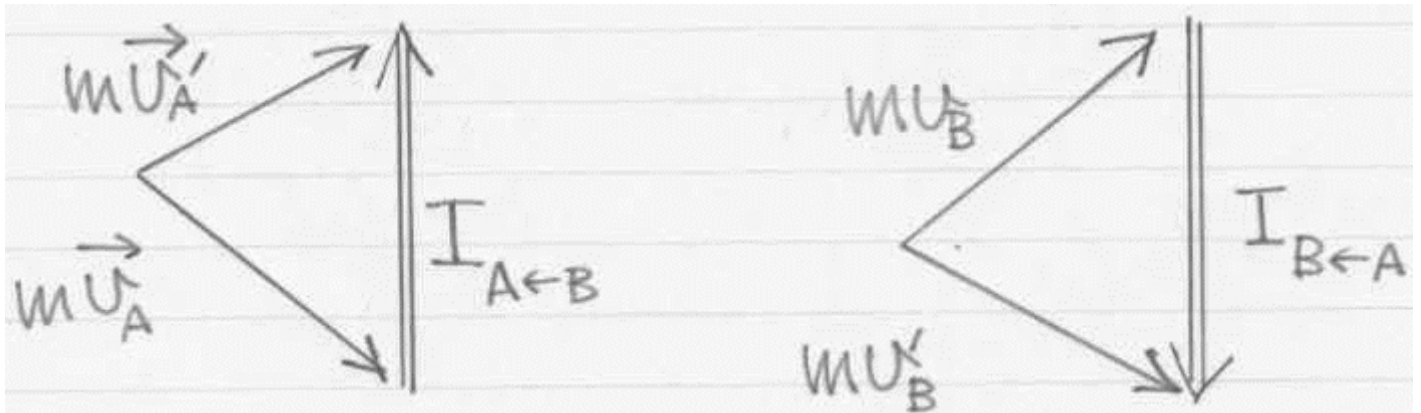
Q.6.8(p.97)

速度を求める公式、 $v = v_0 + at$ を使って衝突を繰り返す時間間隔を求める。

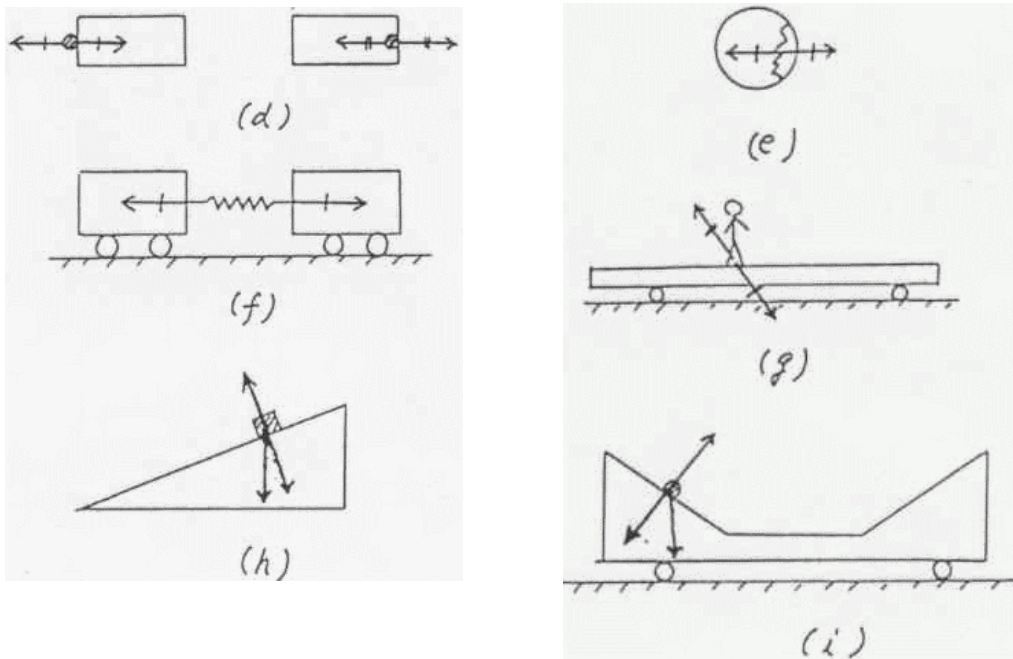
時間間隔から、単位時間当たりの衝突回数 $: N$ を求める。

一回あたりの運動量変化 $= 2mv_2$ より、平均の力 $= 2mv_2 \times N$ 。

Q.6.9(p.99)



Q.6.10(p.99)



Q.6.11(p.99)

突き抜ける前の運動量 $= mv$

突き抜けた後の運動量 $= mv' + MV$

$$\therefore V = \frac{m(v - v')}{M}$$

Q.6.12(p.100)

ΔV = 車の速度変化

$$M \times \Delta V = m \times u$$

$$(\text{答え}) \quad \Delta V = \frac{m \times u}{M}$$

Q.6.13(p.101)

物体と斜面を2体系と考える。鉛直方向には重力が作用する、これは外力である。だから全運動量は保存されない。
また、斜面との間に摩擦力が働くと、その摩擦力は水平方向の成分をもつ。だから全運動量は保存されない。

Q.6.14(p.101)

- (1) 小物体から台車へ作用する力が、水平・左向きの成分をもつから左向きに運動する。
- (2) 小物体、台車はそれぞれ逆向きに運動する。水平方向の全運動量は保存される。

Q.6.16(p.102)

別の原点 O' に対する各質点、および重心の位置ベクトルを $\vec{r}'_i, \vec{r}'_G$ とする。

また O' の O に対する位置ベクトルを $\vec{r}_0$ とすると $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_0, \vec{r}_G = \vec{r}'_G + \vec{r}_0$ したがって、

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2}{m_1 + m_2} + \vec{r}_0$$

つまり原点 O の選び方に無関係である。

$$\therefore \vec{r}'_G = \frac{m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2}{m_1 + m_2}$$

3 質点に対する重心の位置ベクトル $\vec{r}_G = \frac{\sum_i m_i \bullet \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

Q.6.17(p.104)

宇宙に対して相対速度が0の場所が絶対静止の場所である。

Q.6.18(p.105)

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \text{ および } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \text{ より } \vec{r}_2 \text{ を消去して}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Q.6.19(p.107)

台車および人が右および左に移動した距離をそれぞれ l, l' とする。

$$\int_0^t MV(t) = \int_0^t mv(t)$$

$MV(t) = mv(t)$ より $\therefore Ml = ml' \cdots \textcircled{1}$, $l + l' = L \cdots \textcircled{2}$ が成り立つ。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より

$$l = \frac{m}{m+M} L$$

Q.7.2(p.120)

$$\vec{F}=(-ky, kx)$$

$$\vec{F}=-k\vec{y}+k\vec{x}$$

経路Ⅰ：

$$\overrightarrow{OA}: y=x(0 \leq x \leq a),$$

$$\therefore dy=dx,$$

$$W_1 = \int_{(0,0)}^{(a,a)} (-kydx + kxdy) = \int_0^a -kydx + \int_0^a kxdy = -k \int_0^a ydy + \int_0^a xdx = -k \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^a + k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = -\frac{a^2}{2} \bullet k + \frac{a^2}{2} \bullet k = 0$$

経路Ⅱ：

$$\overrightarrow{OBA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$

$$y=0, x=0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$dy=0, dx=0$$

積分経路 $(0,0) \sim (a,0) \quad (a,0) \sim (a,a)$

$$W_{II} = \int_{(0,0)}^{(a,a)} (-kydx + kxdy)$$

$$=_{OB} \int_{(0,0)}^{(a,0)} (-kydx + kxdy) +_{OA} \int_{(a,0)}^{(a,a)} (-kydx + kxdy)$$

$$= 0 + \int_0^a (k \bullet a dy) = k \bullet a [y]_0^a = ka^2$$

経路Ⅲ：

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

$$ydy = (a-x)dx$$

$$dy = \frac{(a-x)dx}{y} \quad y^2 = a^2 - (x-a)^2 \quad y = \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$$

$$W_{III} = \int_{(0,0)}^{(a,a)} (-kydx + kxdy) = k \int -ydx + xdy = k \int -\frac{y^2}{y} dx + x \frac{(a-x)}{y} dx = k \int -\frac{a^2 - (x-a)^2}{y} dx + \frac{ax - x^2}{y} dx$$

$$= k \int \frac{-a^2 - (x-a)^2 + ax - x^2}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} dx = -ka \int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} dx$$

$$I = \int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} dx \quad (x-a) = a \sin \theta \text{ と } 0 < x < a \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \quad d\theta \text{ で微分する。}$$

$$I = a \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$\therefore W_{III} = -ka^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

この場合は積分経路によって W の値が変わる。

Q.7.3(p.121)

$$W = \int_P^Q \vec{F} d\vec{s} = \int F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy$$

$$F_x(x, y) = 0 \quad \dots \text{水平方向に作用する力はない。}$$

$F_y(x, y) = mg$. . . 垂直方向に作用する力は重力。

P 点の高さ . . . y_1

Q 点の高さ . . . y_2

とすると、 $y_1 - y_2 = -h$ (下向きが正なので)

$$W = \int_P^Q 0 dx + \int_{y_1}^{y_2} mg dy = \int_{y_1}^{y_2} mg dy = [mg]_{y_1}^{y_2} = mgh \quad \text{よって (答え) } W = mgh$$

Q.7.6(p.126)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ より、 } \frac{dK}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)$$

$$x = v, t \text{ より } \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{x}{t} \right)^2$$

$$\therefore \frac{d}{dx} K = m \frac{x}{t^2} = m \frac{v}{t} = m \cdot a = F$$

Q.7.7(p.127)

(1) 摩擦係数 $\mu' = 0$

$$F = kx$$

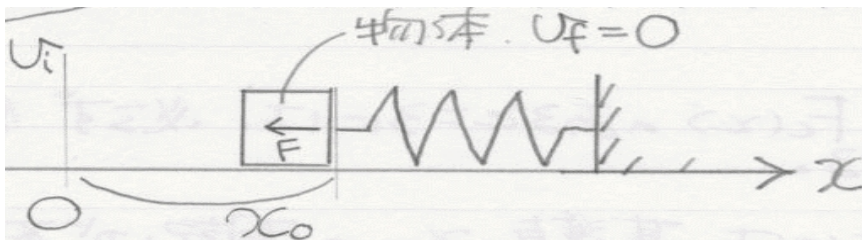
$$W = \int_0^{x_0} F dx = \frac{1}{2} kx_0^2$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \left(\begin{array}{c} \text{摩擦で失われた} \\ \text{エネルギー} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{バネに与えた} \\ \text{エネルギー} \end{array} \right) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

物体がバネに与える仕事

$$\therefore \frac{1}{m} (mv_i^2 - kx_0^2) = v_f^2 = 0$$

$$mv_i^2 = kx_0^2 \quad v_i^2 = \frac{k}{m} x_0^2 \quad (\text{答え}) \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x_0$$



(2) 摩擦で失われた仕事 = (摩擦力) × (距離)

$$= \mu' \cdot mg \times x_0$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \mu' mgx_0 + \frac{kx_0^2}{2} \quad v_i^2 = 2\mu' gx_0 + \frac{k}{m} x_0^2 \quad (\text{答え}) \sqrt{2\mu' gx_0 + \frac{k}{m} x_0^2}$$

Q.7.8(p.129)

保存力・・・分子間力、分散力など、くわしくは他の科目にゆずります。ごめんなさい。

非保存力・・・摩擦力、撃力など。

Q.7.9(p.131)

非保存力がする仕事は経路によってかわるから、位置だけでは決まらない。これが理由である。

Q.7.10(p.132)

$$-mgh$$

Q.7.11(p.132)

$$U(x) = \int_0^x -F_c(x) dx \quad F_c(x) = kx \text{ より}$$

$$U(x) = \int_0^x -kx dx = -\left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^x = -\frac{kx^2}{2}$$

Q.7.12(p.133)

$$U(R+h) - U(R) = -G \frac{mM}{R+h} + G \frac{mM}{R} = G \frac{mMh}{(R+h)R} \cong G \frac{mMh}{R^2} = mgh$$

Q.7.13(p.133)

$$\text{仕事 } W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_A^B f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} d\mathbf{r}$$

$$r^2 = \mathbf{r}^2 \text{ より } 2\mathbf{r} d\mathbf{r} = 2r dr \text{ より } \mathbf{r} d\mathbf{r} = r dr$$

これより中心力は保存力になる。

$$\therefore W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_A^B f(r) dr$$

(1) $n \geq 1$ のとき、 r_0 を基準点として

$$U(r) = -\int_{r_0}^r f(r) dr = -\int_{r_0}^r r^n dr = -\frac{r^{n+1}}{n+1}$$

(2) $n \leq -2$ のとき、同様にして

$$U(r) = -\int_{r_0}^r f(r) dr = -\frac{r^{n+1}}{n+1}$$

Q.7.14(p.134)

$$U(y)=mgy \quad \text{より} \quad F=-\frac{dU}{dy}=-mg$$

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{より} \quad F=-\frac{dU}{dx}=-kx$$

$$U(r)=-G\frac{mM}{r} \quad \text{より} \quad F=-\frac{dU}{dr}=-G\frac{mM}{r^2}$$

マイナスがつく理由、重力が下向きなのに保存力を上向きに取ったため。

Q.7.15(p.138)

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + U(t) \right) = \frac{m}{2} \cdot 2v \frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = v \left(m \frac{dv}{dt} - F(t) \right)$$

$$\therefore m \frac{dv}{dt} = F(x)$$

Q.7.16(p.139)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + (-mgh)$$

したがって、一致する。

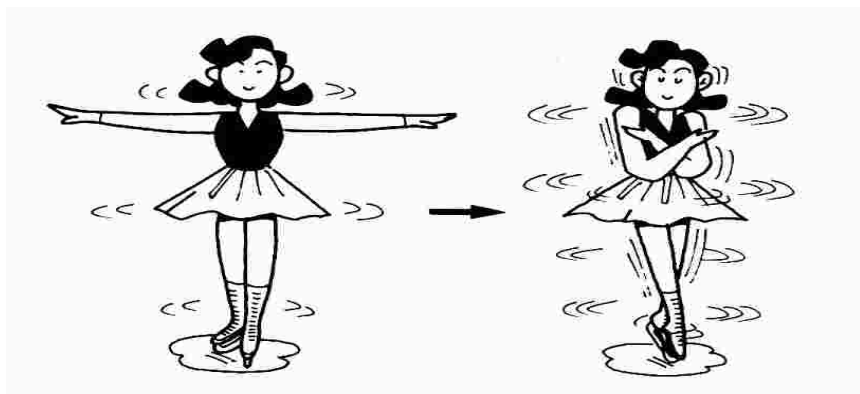
Q.8.1(p.165)

腕を縮める前後で、角運動量が一定に保たれる。腕の質量と長さを、 m_i, l_i で表す。

慣性モーメント I は $I = \sum (m_i \times l_i^2)$ となる。腕を閉じるから l_i が減少するので I も減少する。

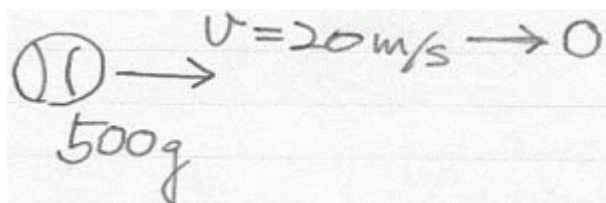
角運動量 L は、 $L = I\omega = \text{constant}$ なので ω が増加する、つまり回転が速くなる。

腕を縮めるときに筋力がする仕事が運動エネルギーの増加につながる。



EXERCISES 4(p.44)

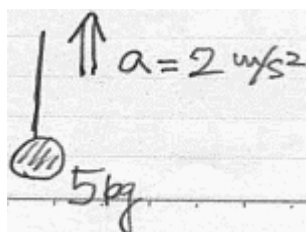
1.



$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ \therefore 0 &= 20 + a \times (1/50) \\ \therefore a &= -1000 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$F = ma = 0.5 \times (-1000) = -500 \quad (\text{答え}) \quad 500\text{N}$$

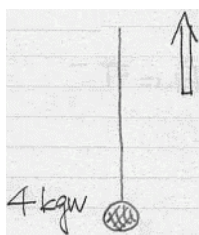
2.



$$\begin{aligned} (1) \text{ 加速度} &= 0 \\ \therefore 5 \times 9.8 + 0 &= 49 \quad \therefore 49\text{N} \end{aligned}$$

$$(2) \quad 5 \times 9.8 + 5 \times 2 = 59\text{N}$$

3.



加速度: $a_k \text{ m/s}^2$, かかる力を F_k とする。

$$F_k = a_k \times 4$$

物体が糸にかける力... $4 \times 9.8 \text{ N}$

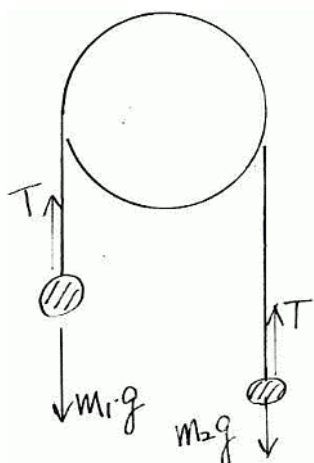
$$F_k + 4 \times 9.8 < 20 \times 9.8$$

(20kgw の力にまで耐えうるから)

$$\begin{aligned} \therefore a_k \times 4 &< 20 \times 9.8 - 4 \times 9.8 \\ a_k \times 4 &< 156.8, \quad a_k \times 4 < 156.8 \div 4 = 39.2 \quad (\text{答え}) 39.2 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

EXERCISES 5(p.86)

1.



m_1 の加速度を a_1 , m_2 の加速度を a_2 とする。下向きを正にして、方程式をつくる。

$$m_1 \cdot a_1 = m_1 g - T \quad (1)$$

$$m_2 \cdot a_2 = m_2 g - T \quad (2)$$

糸でつながっているから、 $a_1 = -a_2$ となる。これを上の式へ使う。

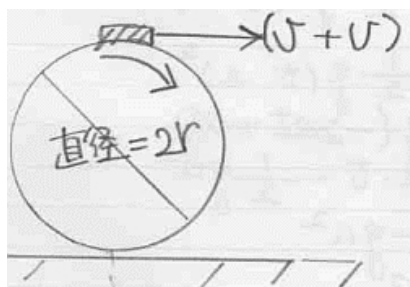
$$\therefore g - \frac{T}{m_1} = -\left(g - \frac{T}{m_2}\right), \quad T = g \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

これを (1), (2) の式へ入れる。 $a_1 = g - \frac{2m_2 g}{m_1 + m_2}$

a_2 についても同様に解く。

$$(\text{答え}) \quad a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

2.



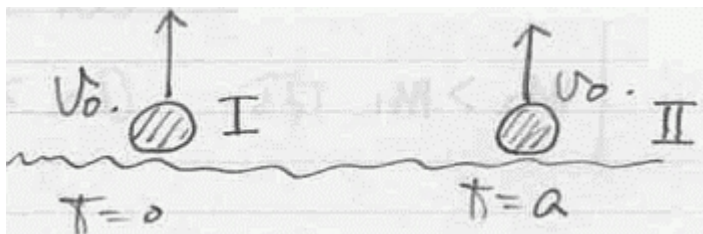
t_k を道路へ落ちるまでの時間とする。鉛直方向には自由落下するから、

$$(2r) = \frac{1}{2} g (t_k)^2$$

$$4r = g \times t_k^2, \quad t_k = 2\sqrt{\frac{r}{g}}, \quad \text{この間に進む距離は、} (v+v) \times t_k$$

$$(\text{答え}) \quad 4v\sqrt{\frac{r}{g}} \text{ の所}$$

3.



t : I が打ち上げられてからの経過時間、 $(t-a)$: II が打ち上げられてからの経過時間

$$y = v_0 \times (\text{経過時間}) - \frac{1}{2} g (\text{経過時間})^2$$

$$\text{I.} \quad y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{II. } y = v_0(t-a) - \frac{1}{2}gt(t-a)^2$$

$$\therefore v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0(t-a) - \frac{1}{2}gt(t-a)^2$$

$$0 = -v_0a - \frac{1}{2}g(-2at + a^2)$$

$$g \times a \times t = v_0a + \frac{1}{2}ga^2$$

$$t = \frac{v_0}{g} + \frac{a}{2} \quad \cdots \text{出会う時刻}$$

出会う高さを求める。

$$y = v_0\left(\frac{v_0}{g} + \frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g} + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0a}{2} - \frac{1}{2}g \times \frac{v_0^2}{g^2} - \frac{1}{2}g \times 2 \frac{v_0}{g} \frac{a}{2} - \frac{1}{2}g \frac{a^2}{4}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{v_0^2}{2g} - \frac{a^2g}{8}$$

5.

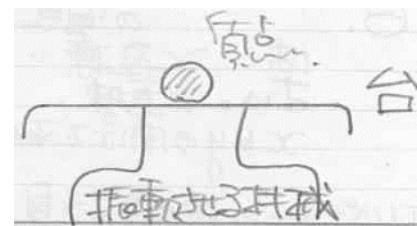
振幅 A の最大値を求める。床に立って台を見て考える。

$$y = A \sin \omega t$$

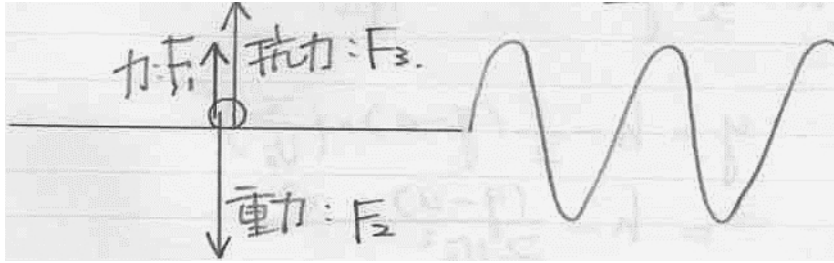
$\Updownarrow$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t$$

台の振動数を n とする。



$$n = \frac{\omega}{2\pi}$$



運動方程式は、 $(F_1 - F_2 + F_3) = ma$ である。 a は単振動の加速度なので、 $a = -A\omega^2 \sin \omega t$

ゆえに、 $a_{\max}$ は、 $A\omega^2 (= A \times (2\pi \times n)^2)$

台が床から離れた瞬間は、 $F_3 = 0$, $F_1 = 0$ になる。

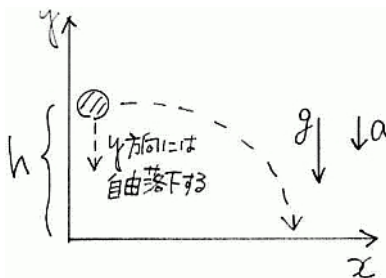
その瞬間には、未だ運動が続いていると考えて、 $F_2 = mg = m(A \times (2\pi \times n)^2)$

$$A = \frac{g}{(2\pi \times n)^2}$$

これが振幅の最大値を与える。

6.

質点の x 座標, y 座標を t の関数として表し、 x と y の関係を求める。



エレベーターの中で質点を見ると、下向きに加速度 a がかかるように見える。

$$x \text{ 方向 : } x = v_0 t$$

$$y \text{ 方向 : } y = h - \frac{1}{2}(g + a)t^2$$

$$y = h - \frac{(g + a) \times x^2}{2v_0^2}$$

t を消去すると次式が得られる。

EXERCISES 6(p.110)

1.

$$\text{摩擦の力} = 1.0 \times 10^3 \times 9.8 \times 1.0 \times 10^{-1} = 9.8 \times 10^2$$

$$\text{合力} = 4.0 \times 10^3 - 9.8 \times 10^2 = 4000 - 980 = 3020$$

$$\text{力積} = 3020 \times 10$$

$$10 \text{ 秒後の速さ} = V$$

$$(\text{運動量の変化}) = mV - 0 = 3020 \times 10$$

$$\therefore V = \frac{3020 \times 10}{1.0 \times 10^3} = 30.2$$

(答) 30 m/s

2.

$t = 0$ の速度を V_0 、各時刻の速度を $V(t)$ とする。

$$mV(t) - mV_0 = F_i \times t \quad \begin{cases} V_0 = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

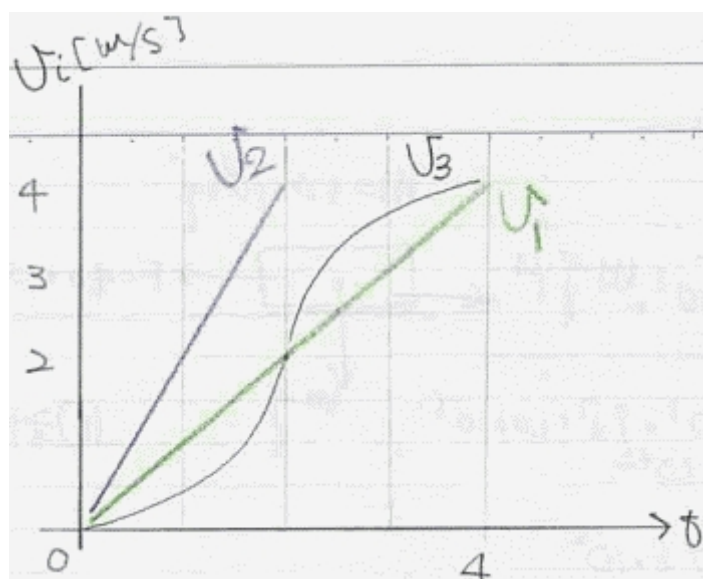
$$\therefore V(t) = \frac{1}{2} F_i \times t$$

$$(a) F = 2 \Rightarrow V(t) = t \quad 0 < t < 4$$

$$(b) F = 4 \Rightarrow V(t) = 2t \quad 0 < t < 2$$

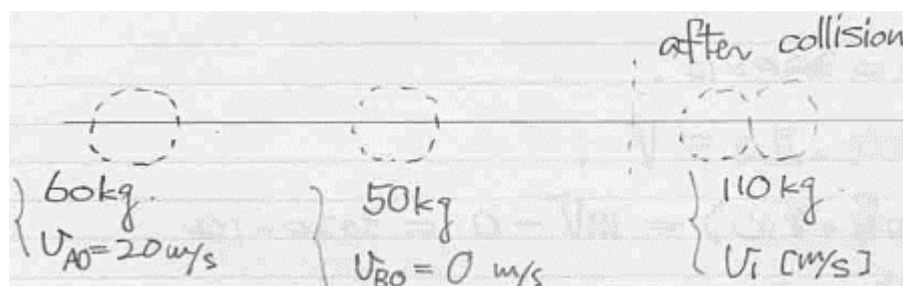
$$(c) F = 2t \Rightarrow V(t) = t^2 \quad 0 \sim 2$$

$$V(t) = -t^2 + 4t \quad 2 \sim 4$$



3.

60kg のスケーターを A で示し、50kg のスケーターを B で示す。また、衝突の際に A, B へ作用する力を、 f_A, f_B で示す。(下図参照)



$$\text{運動量の保存から、} v_1 = \frac{60 \times 20}{110} = \frac{1200}{110}$$

$$\text{次に、A に対し、運動量の定理：} 60 \times v_1 - 60 \times v_{A0} = f_A \cdot \Delta t$$

$$\text{B に対し、運動量の定理：} 50 \times v_1 - 50 \times v_{B0} = f_B \cdot \Delta t$$

$$f_A \Delta t = \frac{1200 \times 60}{110} - 60 \times 20$$

$$= \left(\frac{120}{11} - 20 \right) \times 60 = -545.4546$$

$$f_B \Delta t = \frac{1200}{110} \times 50 = 545.4545 \dots$$

$$f_A < 1.0 \times 10^2 \text{ kgw} = 980 \text{ N} \quad , \quad 545.4545 = f_A \cdot \Delta t < 980 \cdot \Delta t$$

$$\therefore \Delta t > \frac{545.454 \dots}{980} = 0.5565 \quad (\text{答}) 0.56 \text{ 秒}$$

4.

(1)

ジェット流の速さが v ということは、ジェット流の単位時間に進む距離が v という意味になる。
 ゆえに単位時間あたりジェット流の移動する体積は Sv になる。 羽根の速さを考慮すると、羽根にあたる体積は $S(v-V)$ である。羽にあたる質量は、 $S\rho(v-V)$ である。 (答) $S\rho(v-V)$.

(2)

単位時間を T で表し、水の質量を m で表す。平均の力を f と書く。

$$\frac{m}{T} = S\rho(v-V) \quad , \quad \text{運動量の定理を適用すると、} \quad mV - mv = T \times f$$

$$f = \frac{m}{T}(V - v) = -S\rho(v-V)^2$$

平均の力として、 f の絶対値をとる。 (答) $S\rho(v-V)^2$

5.

(1)

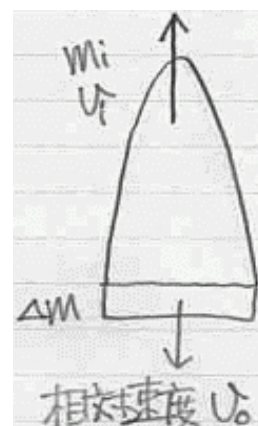
v_i … ガスを噴射する前の速度

Δv_0 … ロケットの速度変化

$v_{(1)}$ … ガスを 1 回噴射した後の速度

$v_{(2)}$ … ガスを 2 回噴射した後の速度

$v_{(3)}$ … ガスを 3 回噴射した後の速度



$$\Delta v_0 = v_{(1)} - v_i$$

運動量の保存則より、

$$m_i v_i = (m_i - \Delta m) \cdot v_{(1)} + (v_{(1)} - v_0) \times \Delta m$$

$$= m_i \cdot v_{(1)} - \Delta m \cdot v_{(1)} - v_0 \cdot \Delta m + v_{(1)} \cdot \Delta m \quad \text{これを整理して、}$$

$$v_{(1)} - v_i = \Delta v_0 = \frac{v_0 \times \Delta m}{m_i}$$

$$(\text{答}) \quad \Delta v_0 = (v_0 \times \Delta m) / m_i$$

(2)

Δv_2 : 噴射（3回目）する時の速度変化、 Δv_3 : 噴射（4回目）する時の速度変化・・・。

$$\text{一回目の後の速度} : v_{(1)} = v_i + \Delta v_0$$

$$\text{二回目の後の速度} : v_{(2)} = v_{(1)} + \Delta v_1 \quad \Delta v_1 \text{ は 2 回目の速度変化}$$

$$\text{三回目の後の速度} : v_{(3)} = v_{(2)} + \Delta v_2 \quad \Delta v_2 \text{ は 3 回目の速度変化}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

二回目の噴射で、保存則を立てる。

$$(m_i - \Delta m) \times v_{(1)} = (m_i - 2\Delta m) \times v_{(2)} + \Delta m(-v_0 + v_{(2)})$$

$$\text{上の式を整理すると、} \Delta m \cdot v_0 = (m_i - \Delta m)(v_{(2)} - v_{(1)})$$

$$\text{よって速度変化は、} \quad v_{(2)} - v_{(1)} = \Delta v_1 = \frac{\Delta m \times v_0}{m_i - \Delta m}$$

三回目の噴射で、保存則を立てる。

$$(m_i - 2\Delta m) \times v_{(2)} = (m_i - 3\Delta m) \times v_{(3)} + \Delta m(-v_0 + v_{(3)})$$

$$\text{以上を整理すると、} \Delta v_0 = \frac{\Delta m \times v_0}{m_i} \quad , \quad \Delta v_1 = \frac{\Delta m \times v_0}{m_i - \Delta m} \quad , \quad \Delta v_2 = \frac{\Delta m \times v_0}{m_i - 2\Delta m} \quad \cdots \quad \Delta v_{(n-1)} = \cdots \quad .$$

$$v_i - (\Delta v_0 + \Delta v_1 + \Delta v_2 + \cdots + \Delta v_{(n-1)}) = v_f$$

$$\therefore v_f - v_i = -\Delta m \times v_0 \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_i - \Delta m} + \frac{1}{m_i - 2\Delta m} + \cdots + \frac{1}{m_i - (n-1)\Delta m} \right)$$

$$= -\Delta m \times v_0 \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{m_i - (k-1)\Delta m} \right] \quad \cdots(\text{答})$$

(3)

$$\Delta m = \frac{m_f - m_i}{n-1} \quad : \text{定数}$$

$$v_f - v_i = -v_0 \sum_{k=1}^n \frac{\Delta m}{m_i - (k-1)\Delta m}$$

近似すると、

$$\begin{aligned} -v_0 \times \int_{m_i}^{m_f} \frac{1}{m} dm &= -v_0 [\log m]_{m_i}^{m_f} \\ &= v_0 [\log m]_{m_f}^{m_i} = v_0 (\log m_i - \log m_f) \\ &= v_0 \log \frac{m_i}{m_f} \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

6.(1)

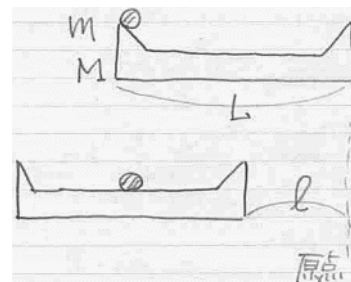
滑り出す前の重心座標を x_{G1} 、中点へ達したときの重心座標を x_{G2} とする。

$$x_{G1} \times (m + M) = mL + \frac{ML}{2}$$

$$x_{G2} \times (m + M) = m \left(\frac{L}{2} + l \right) + M \left(\frac{L}{2} + l \right)$$

$x_{G1} = x_{G2}$ の関係を利用して、 l を求める。

$$(\text{答}) \quad l = \frac{mL}{2(m+M)}$$



(2) E_1 : はじめに小物体の持っていたエネルギー、 E_2 : 摩擦によって失われるエネルギー。

$E_1 = E_2$ とする方針もあるが、問題の条件のみではどこで静止するか答えを出せない。

EXERCISES 7(p.140)

1. $\int_{x_0}^{x_f} F(x) dx$

$F=5\text{N}$ が物体になす仕事=

$x=3t^2-6t$ を代入する。

(1) $t=0\sim 1, \quad x=0\sim -3, \quad W=[5x]_0^{-3}=-15[\text{J}]$

(2) $x=3t^2-6t=3t(t-2) \quad t=0, 2$

$t=0\sim 2, \quad x=0\sim 0 \quad \therefore W=0$



(3) $t=0\sim 3, \quad x=0\sim 9$

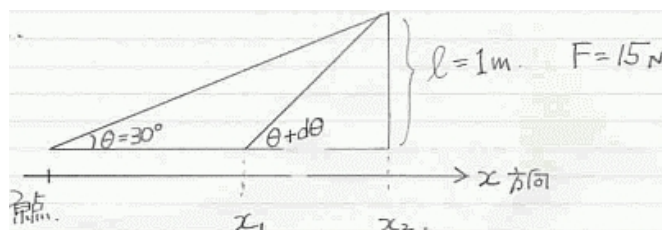
$W=[5x]_0^9=45[\text{J}]$

2.

$x_2 = \frac{l}{\tan \theta}$

$(x_2 - x_1) = \frac{l}{\tan(\theta + d\theta)}$

より、 $x_1 = \left(\frac{l}{\tan \theta} - \frac{l}{\tan(\theta + d\theta)} \right)$ と書ける。



近似式を使って、 $x_1 = \frac{l}{\sin^2 \theta} d\theta$ ←図形から考えて、 $dx = \frac{l}{\sin^2 \theta} d\theta$

ゆえに、 $W = \int_0^{x_1} F \cos \theta dx$ ←(p.118, 式 7.3) , $W = \int_{\theta=30}^{\theta=45} F \cos \theta \times \frac{l}{\sin^2 \theta} d\theta$

$W = F \times l \int_{30}^{45} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = F \times l \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t^2}$

$\sin \theta = t, \quad \frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$

θ	30°	45°
t	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= F \times l \left[-t^{-1} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 15(2 - \sqrt{2})$

(答) $15(2-\sqrt{2})[\text{J}] = 8.79\text{J}$

3.

W = 投げ出すための仕事, k_2 = 投げる前のボールの運動エネルギー, k_3 = 投げた後のボールの運動エネルギー

$$\Rightarrow k_2 + W = k_3, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = \frac{1}{2} \times (1.5 \times 10^{-1}) \times (40)^2 = \frac{1}{2} \times 1.5 \times \frac{1600}{10} = \frac{3}{4} \times 160 = 120$$

(答) $W = 1.2 \times 10^2 [\text{J}]$

4.

波の強さについて。 m : 質量 A : 振幅 ν : 振動数、 v : 速さ ρ : 媒質の密度。

波の伝搬…波は媒質を運ばない。エネルギーを運ぶ。

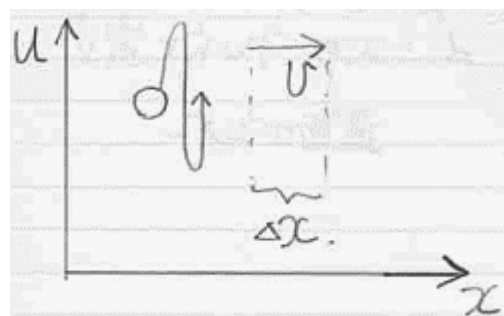
質点の運動エネルギーを k_j と書く。

質点の変位:

$$u_{(t,x)} = A \sin(\omega t - kx)$$

$$\times k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{波数})$$

$$k_j = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega \cos \omega t)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \times \cos^2 \omega t$$



質点の単振動

$u(t)$: 質点の変位 ($x=0$)

$$\frac{du}{dt} : \text{質点の速さ} \quad u(t) = A \sin \omega t$$

$$\frac{du}{dt} = A\omega \sin \omega t$$

I を波の強さとする。

k_j は、 $\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ を振幅にして、周期的に変化する。

その時間平均は $\frac{1}{T} \int_0^T () dt$ になる。ゆえに、 $I = 2\rho\pi^2 A^2 v^2 V$ 。つまり、波の強さは $A^2 v^2$ に比例する。

5.

(1)

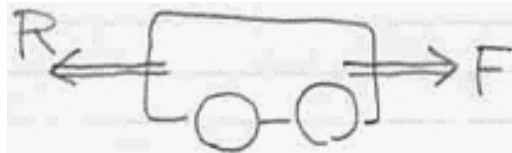
W : 時間 t の間にエンジンが車にした仕事。 K_1 : 静止しているときの運動エネルギー。 K_2 : t 秒後の運動エネルギー。

$$K_1 + W = K_2, \quad K_2 = \frac{1}{2}mv^2, \quad W = P \times t \quad \therefore v^2 = \frac{2 \times P \times t}{m}$$

(答) $\sqrt{\frac{2 \times P \times t}{m}}$

(2)

車が最大速度で走っているところ。 $\longrightarrow$
等速直線運動になり、 $F = R$ が成り立つ。



一方で、(7.6)式より $P = F \times V$, $\therefore V = \frac{P}{R}$.

6.

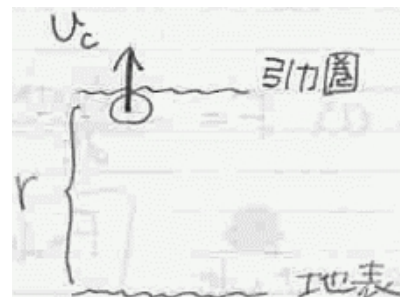
位置エネルギー $= m \cdot g \cdot r$

$$\text{Kinetic Energy} = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 > mgr$$

$$\therefore v > \sqrt{2gr},$$

$$\begin{aligned} v_c &= \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} = \sqrt{125.44 \times 10^3} \\ &= 11.2 \times 10^3 \\ &= 11[\text{km/s}] \end{aligned}$$



$$R=8314 [\text{J/mol K}], T=300\text{K}, M_{\text{N}_2}=28, M_{\text{O}_2}=32, M_{\text{H}_2}=2 \text{ を次式へ代入する。} \quad \langle v \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2RT}{M} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\langle v \rangle_{\text{N}_2} = \frac{2}{1.772} \times \sqrt{\frac{2 \times 8310 \times 300}{28}} = 476 \text{m/s}$$

$$\langle v \rangle_{\text{O}_2} = \frac{2}{1.772} \times \sqrt{\frac{2 \times 8310 \times 300}{32}} = 446 \text{m/s}$$

$$\langle v \rangle_{\text{H}_2} = \frac{2}{1.772} \times \sqrt{\frac{2 \times 8310 \times 300}{2}} = 1780 \text{m/s}$$

この回答から予想できること: $v_{\text{O}_2} < v_{\text{N}_2} < v_c < v_{\text{H}_2}$ であり、 H_2 は宇宙へ飛び出す。

7.

(1)

$v \equiv ds$ の変位が生じた後の速度

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \qquad F \cdot ds = \left\{ \frac{d}{dt}(mv) \right\} \times ds$$

だから、

$$\begin{aligned} \therefore F \cdot ds &= \left\{ \frac{dm}{dt} \cdot v + m \frac{dv}{dt} \right\} \times ds \\ &= dm \times v \times \frac{ds}{dt} + m \times dv \times \frac{ds}{dt} \\ &= dm \cdot v^2 + m \cdot dv \cdot v \end{aligned}$$

だから、 $F \cdot ds = v^2 \cdot dm + mv \cdot dv$

(2)

与式から、
$$m^2 = \frac{m_0^2}{1 - (v/c)^2}$$

$$1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{m_0^2}{m^2}$$

$$\frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2}$$

$$c^2 \cdot m_0^2 = m^2 \cdot c^2 - m^2 v^2$$

この式の両辺を v で微分する。

c と、 m_0 は定数なので、

$$\therefore 0 = 2m \cdot dm \times c^2 - \{ 2mdm \cdot v^2 + m^2 \cdot 2v \cdot dv \}$$

$$0 = dm \times c^2 - dm \times v^2 - mv \cdot dv$$

$$\therefore c^2 dm = v^2 dm + mv dv$$

8.

(1)

物体に対して、運動方程式を立てる。

$$F = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F = F_c + F_n, \quad F_c = -\frac{du}{dx}$$

$$\therefore m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{du}{dx} + F_n$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

上の式の両辺に v をかける。また次式を利用する。

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{du}{dx} \times v + F_n \times v$$

$$= -\frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + F_n \times v$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = -\frac{du}{dt} + F_n \times v$$

$$\frac{d}{dt} (mv^2) = 2mv \cdot \frac{du}{dt} \quad \text{を利用する。}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) + \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + u \right) = F_n \times v$$

だから、

$$\frac{d}{dt} E = F_n \times v \quad \left(\begin{array}{l} \text{この式の左辺は、単位時間あたり} \\ \text{のエネルギー変化、つまりエネルギー} \\ \text{の散逸する速さを示している。} \end{array} \right)$$

(2) 単振動、 $y = A \sin \omega t$ の $\langle K \rangle$ と $\langle U \rangle$ を求めて、 $\langle K \rangle = \langle U \rangle$ を示すことが回答の方針。

物体の速度を、 v で表わすと、 $K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$$v = A \omega \cdot \cos \omega t$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t$$

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T K dt \quad T \text{ は周期}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi \quad \text{よ} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \quad \text{りとなる。}$$

だから

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t dt \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \end{aligned}$$

物体が弾性力を受ける＝単振動する媒質に弾性率がある事と同じ。

p. 141 問題 4 の解答参照

運動エネルギー＝位置エネルギーとなる。

(3)

$E = K + U, K = U$ なので、 $\langle K \rangle = \frac{\langle E \rangle}{2}$

また、(1)の結果から、

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= -\mu \cdot v^2 = -\mu \times \frac{2}{m} \times \frac{m}{2} \times v^2 \\ &= -\frac{2}{m} \mu \times \frac{mv^2}{2} \\ &= -4\beta \times K \quad \left(\because \beta = \frac{\mu}{2m} \right)\end{aligned}$$

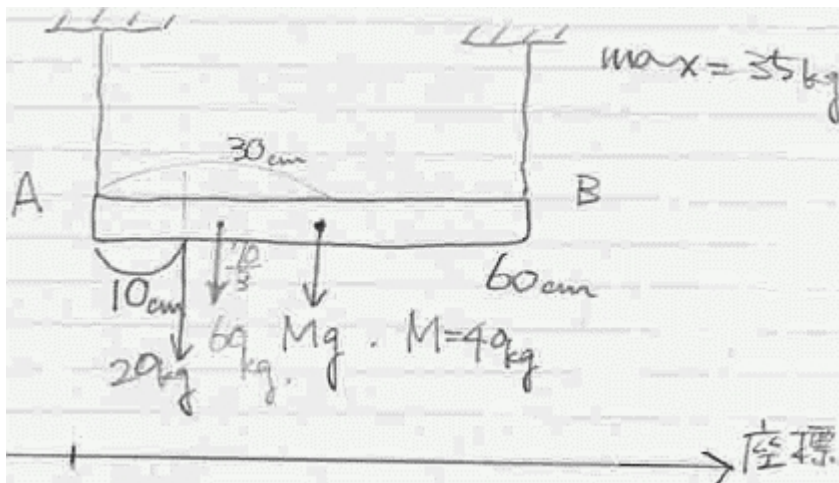
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle E \rangle &= -4\beta \langle K \rangle \\ &= -2\beta \langle E \rangle\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \langle E \rangle = -2\beta \langle E \rangle \quad \text{を解くと} \quad \langle E \rangle = E_0 \cdot e^{-2\beta t} \quad (E_0 \text{ は定数})$$

$\langle E \rangle$ は A^2 (A : 振幅) に比例するから、 $A = A_0 \times e^{-\beta \cdot t}$ 。

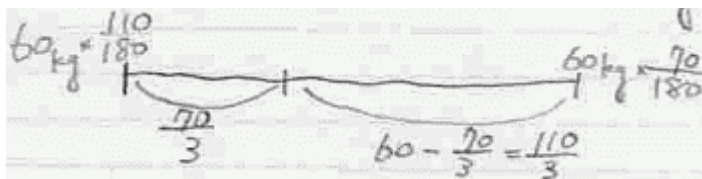
EXERCISES 8(p.171)

1.



$$r_G = \frac{30\text{cm} \times 40\text{kg} + 10\text{cm} \times 20\text{kg}}{40\text{kg} + 20\text{kg}} = \frac{1200 + 200}{60} = \frac{1400}{60}$$

$$r_G = \frac{70}{3} \text{ cm} \quad \text{※ここに}(40+20)\text{kgwが掛かっている。}$$



$$60\text{kg} \times \frac{110}{180} = \frac{110}{3} = 36.66... > 35\text{kg}$$

短い方にたくさん荷重が掛かる。

∴Aのロープには36.67kgの荷重がかかる。

ゆえにロープは切れる。

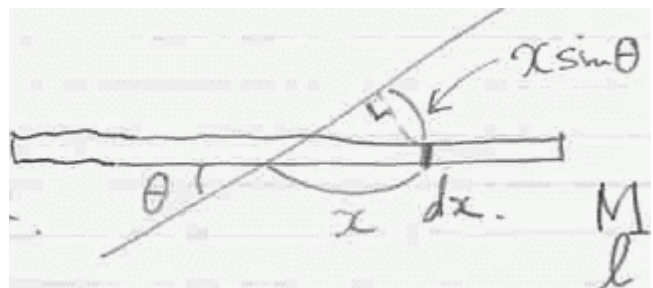
2.

dm : dx 部分の質量

dI : dx 部分の慣性モーメント

$$dm = \frac{M}{l} \times dx$$

半径 = $(x \sin \theta)$ と考えれば、 $dI = dm \times (x \sin \theta)^2$ 。



$$\int_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}} dI \equiv I$$

全体の慣性モーメント =

$$I = \frac{M}{l} \sin^2 \theta \int_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{M}{l} \sin^2 \theta \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{M}{12} \sin^2 \theta \times l^2$$

p. 172

3.

重心は、中心線上にある。全体の重心の位置を x_3 で表わす。 m_1 = 円錐の質量、 m_2 = 半球の質量

p.145 図 8.3 参照して、 $x_1 = R + \frac{1}{4}(2R) = \frac{3}{2}R$

$$(m_1 + m_2) \times x_3 = m_1 \times x_1 + m_2 \times x_2$$

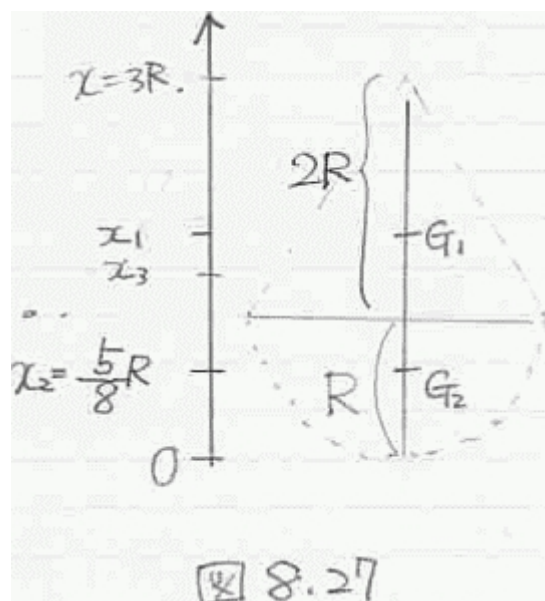
$$m_1 = \frac{(2R) \times \pi R^2}{3} \times \rho, \quad m_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \frac{1}{2} \times \rho$$

$$\therefore x_3 = \frac{\frac{(2R) \times (\pi R^2)}{3} \times \frac{3}{2} R + \frac{4\pi R^3}{3 \times 2} \times \frac{5}{8} R}{\frac{2R \times \pi R^2}{3} + \frac{4\pi R^3}{3 \times 2}}$$

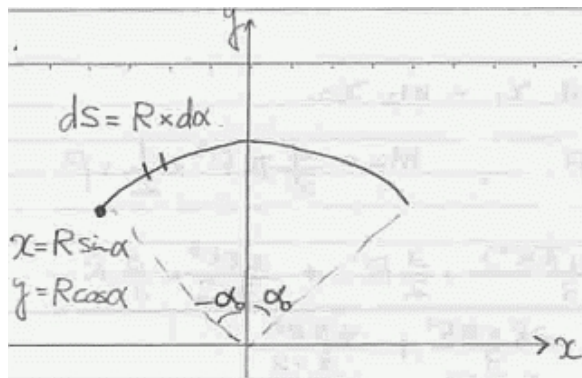
$$= \frac{R \times \pi R^2 \times 3R + \frac{1}{4} \pi R^3 \times 5R}{2R \cdot \pi R^2 + 2\pi R^3}$$

$$= \frac{3R + \frac{5}{4} R}{4} = \frac{17}{16} R$$

$$\therefore x_3 = \frac{17}{16} R$$



4.

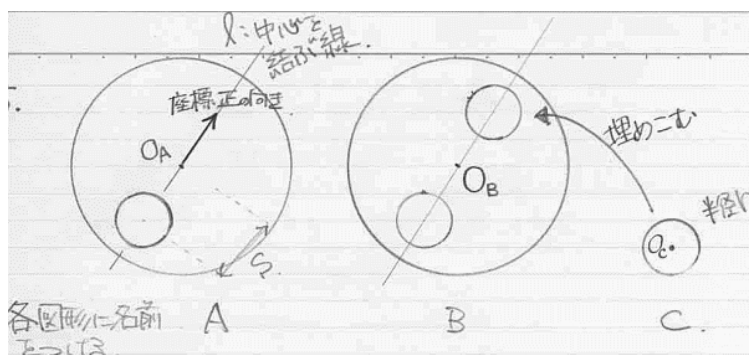


$$x_G = \frac{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R \sin \alpha \times ds}{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} ds} = \frac{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R \sin \alpha \times R \cdot d\alpha}{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R d\alpha} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R \cos \alpha \times ds}{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} ds} = \frac{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R^2 \sin \alpha \times R \cdot d\alpha}{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R d\alpha} = \frac{R^2 \cdot 2 \sin \alpha_0}{R \times 2\alpha_0}$$

$$\therefore y_G = \frac{R \sin \alpha_0}{\alpha_0}$$

5.



A が問題の図形。 線対称なので A の重心は、線 l の上にある。さらに、B、C の重心は各々の真ん中、 O_B, O_C となることは明白である。

各々の重さを、 W_A, W_B, W_C とする。

$$W_A = \pi R^2 \cdot \rho - \pi r^2 \rho$$

$$W_B = \pi R^2 \cdot \rho - 2\pi r^2 \rho$$

$$W_C = \pi r^2 \rho$$

O_A を原点にして、l 上に座標をとる。A の重心 x_G は B の重心と C の重心を足したもの。

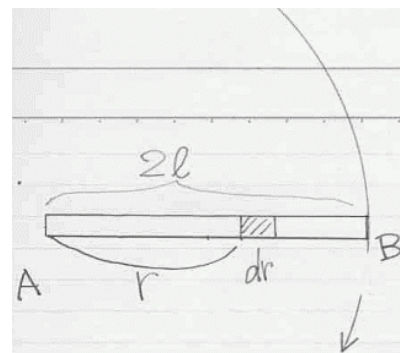
$$\therefore W_A \times x_G = W_B \times 0 + W_C \times (-S)$$

$$(\pi R^2 \cdot \rho - \pi r^2 \rho) \cdot x_G = \pi r^2 \rho \times (-S)$$

$$(R^2 - r^2)x_G = -S \cdot r^2$$

(答) R の円の中心から、 r の円の中心に向かって $\frac{S r^2}{R^2 - r^2}$ 進んだ位置

6.



棒を質点の集合体とみなし、微小部分 dr について考える

ρ : 密度 ω : 角速度 dm : dr 部分の質量

dK : dr 部分の運動エネルギー

v : dr 部分の速度 $v = r \cdot \omega$

$$dK = \frac{1}{2} dm \cdot v^2$$

$$\therefore dK = \frac{1}{2} r^2 \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot dr$$

両辺を積分する

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_0^{2l} r^2 \omega^2 \rho \cdot dr \\ &= \frac{\rho \omega^2}{2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2l} = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot 8l^3}{2 \times 3} \end{aligned}$$

$$M = \rho \cdot l \text{ より、} \quad (\text{答}) \text{ 運動エネルギー} \quad K = \frac{4}{3} \cdot M l^2 \omega^2$$

dL : dr 部分の角運動量

一般に $l = r \times p = r \times mv$ である。(※ここだけ、 l は各運動量を表しています。)、

$$\therefore dL = r \times dm \times r\omega = r^2 \cdot \omega \cdot \rho \cdot dr \quad \text{この両辺を積分する。}$$

$$\therefore L = \int_0^{2l} r^2 \omega \rho \cdot dr$$

$$= \omega \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2l}$$

$$= \frac{8 \omega \rho l^3}{3}$$

$M = \rho \cdot l$ なので、(答) 角運動量

$$L = \frac{8 \omega M l^2}{3}$$

7.

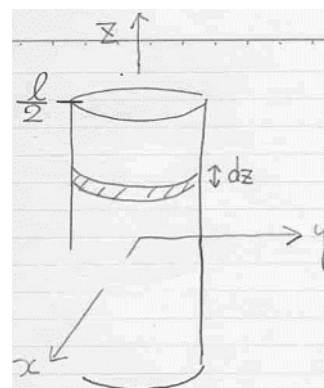
右図のように、円柱を薄い円板に分けて考える。

この部分を dm 、密度を ρ とする。 $M = \pi \cdot R^2 \cdot l \cdot \rho$, $dm = \pi \cdot R^2 \cdot dz \cdot \rho$

dI_{zG} : 薄い円盤の重心を通る z 方向の軸に関する慣性モーメント

dI_{xG} : 薄い円盤の重心を通る x 方向の軸に関する慣性モーメント

dI_{yG} : 薄い円盤の重心を通る y 方向の軸に関する慣性モーメント



重心から円盤までの距離を Z として、 x 、 y 軸に関する慣性モーメントを、各々

dI_x, dI_y であらわす。対称性があるので、 $dI_x = dI_y$ である。

$$dI_{z_G} = \frac{R^2}{2} dm \quad \dots \quad \boxed{\text{教 p.159}} \text{表 8.1 参照}$$

直交軸の定理 (p.159) より、 $dI_{z_G} = dI_{x_G} + dI_{y_G}$, 対称性より $dI_{x_G} = dI_{y_G}$. $\therefore dI_{x_G} = \frac{R^2}{4} dm$

$$\begin{aligned} dI_x &= dI_{x_G} + Z^2 dm \\ &= \frac{R^2}{4} dm + Z^2 dm \end{aligned}$$

この式の両辺を積分する。

$$\therefore I_x = \frac{R^2}{4} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dm + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} Z^2 \cdot \pi R^2 \rho \cdot dZ$$

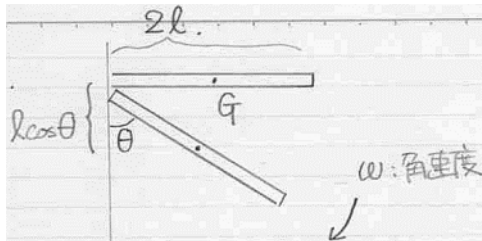
$$\therefore I_x = \frac{R^2}{4} M + \pi R^2 \rho \left[\frac{Z^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{MR^2}{4} + \frac{\pi R^2 \rho l^3}{12}$$

$M = \pi R^2 l \rho$ より (答)

$$I_x = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$$

9.



☆棒の線密度を ρ として、棒の慣性モーメント I を求める。

$$M = 2l \times \rho$$

$dm = \rho \cdot dx$ $\dots$ 微小部分 dx の重さ

$dI \dots dx$ 部分の慣性モーメント

$$dI = x^2 dm = x^2 \cdot \rho \cdot dx$$

$$I = \int_0^{2l} dI = \rho \int_0^{2l} x^2 dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2l}$$

$$= \frac{8l^3 \rho}{3} = \frac{4}{3} l^3 M$$

K_s : 棒が鉛直線と角 θ を なしている時 の運動エネルギー

$$K_s = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \downarrow$$

この時、棒の重心 G の位置

エネルギー減少分を u とすれば

$$u = Mg \cdot l \cos \theta = K_s$$

$$K_s = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4l^3 M}{3} \omega^2$$

$$\therefore 2l^2 \omega^2 = 3 \cdot g l \cos \theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l} \cos \theta}$$

(答)

(以上です..) ...